Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 11

Abgabe: Freitag, den 26. Januar 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 11.1 *(2+3 Punkte)*

Ziel dieser Aufgabe ist es Korollar 13.10 aus dem Dimensionssatz (Satz 18.2) zu folgern. Seien daher K ein Körper und U, V endlich-dimensionale K-Vektorräume.

(a) Geben Sie eine Basis und die Dimension des K-Vektorraums $U \times V$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Sei W ein K-Vektorraum sodass $U, V \subseteq W$. Folgern Sie aus Satz 18.2 mit Hilfe einer geeigneten linearen Transformation T, die Gleichung

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

Aufgabe 11.2 *(5 Punkte)*

Eine *lineare Algebra* L über einem Körper K ist ein K-Vektorraum versehen mit einer Vektormultiplikation sodass die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in L$

(ii) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in L$

(iii) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in L$, $c \in K$

Falls darüberhinaus einerseits ein $I \in L$ existierst sodass $I\alpha = \alpha I = \alpha$ für alle $\alpha \in L$ gilt, so wird L eine lineare Algebra *mit Einheit* genannt. Falls andererseits für alle $\alpha, \beta \in L$ schon $\alpha\beta = \beta\alpha$ gilt, so wird L eine *kommutative* lineare Algebra über K genannt.

Betrachten Sie nun einen fixierten Körper K mit K-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass $L(V, V)$ versehen mit $\circ$ (Komposition/Verkettung) als Vektormultiplikation eine lineare Algebra über K mit Einheit ist.

Aufgabe 11.3 *(1+2+1+2 Punkte)*

(a) Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{m\times n}(K)$. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} U_A\colon K^{1\times m} &\to K^{1\times n} \\ \alpha &\mapsto \alpha A. \end{aligned}$$

  (i) Zeigen Sie, dass U_A eine lineare Abbildung ist.

  (ii) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von U_A bzgl. der Standardbasen von $K^{1\times m}$ und $K^{1\times n}$.

(b) Betrachten sie $\mathcal{B} := ((0, 2, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 1))$ und $\mathcal{B}' := ((-1, 1, 1), (-2, 0, 3), (0, 3, 2))$ in $\mathbb{R}^3$.

  (i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ (geordnete) Basen von $\mathbb{R}^3$ sind.

  (ii) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Identitätsabbildung $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto x$ bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.